Operatory na kratach Banacha
Lista 1 (porządki)

Zad 1. Pokazać, że każdy praporządek $\leq$ na X definiuje wzorem $x \sim y \overset{df}{\iff} x \leq y$ oraz $y \leq x$ relację równoważności na X, natomiast wzór

$$[x] \leq [y] \overset{df}{\iff} x \leq y$$

poprawnie definiuje porządek (częściowy) zbiorze klas abstrakcji $X/\!\sim\, = \{[x] : x \in X\}$ relacji $\sim$.

Zad 2. Czy relacja równoważności może być porządkiem częściowym? A czy może być porządkiem liniowym?

Zad 3. Rozważmy $\mathbb{R}$ ze standardowym porządkiem liniowym $\leq$. Która z relacji na $\mathbb{R}$ jest praporządkiem, częściowym porządkiem, porządkiem liniowym, a która relacją równoważności, gdzie

$$x\mathcal{R}_1 y \iff y = x, \qquad x\mathcal{R}_2 y \iff x \leq y+1, \qquad x\mathcal{R}_3 y \iff x \leq y, \qquad x\mathcal{R}_4 y \iff y \leq x,$$

$$x\mathcal{R}_5 y \iff |x| \leq |y|, \qquad x\mathcal{R}_6 y \iff x \leq 2y, \qquad x\mathcal{R}_7 y \iff 0 \leq x \leq y \text{ lub } x \leq y < 0.$$

Zad 4. Pokazać, że relacja $\geq$ jest porządkiem częściowym na X wtedy i tylko wtedy, gdy relacja $y \leq x \overset{df}{\iff} x \geq y$ jest porządkiem na X.

Zad 5. *Ostrym porządkiem* nazywamy relację przechodnią i antyzwrotną, tzn. taką, w której żaden element nie jest w relacji sam ze sobą. Pokazać, że relacja $\geq$ jest porządkiem częściowym na X wtedy i tylko wtedy, gdy relacja $x > y \overset{df}{\iff} x \geq y$ oraz $x \neq y$, jest ostrym porządkiem na X.

Zad 6. Niech $(X, \geq)$ będzie zbiorem (częściowo) uporządkowanym. Niech $Y \subseteq X$ oraz $x \in X$.

Nazwa	Definicja
x jest ograniczeniem górnym Y	$x \geq y$ dla każdego $y \in Y$
x jest elementem największym w Y	$x \in Y$ oraz $x \geq y$ dla każdego $y \in Y$
x jest elementem maksymalnym w Y	$x \in Y$ oraz nie ma $y \in Y \setminus \{x\}$ takiego, że $y \geq x$

Analogicznie (zastępując $\geq$ przez $\leq$) definiujemy ograniczenie dolne, element najmniejszy oraz element minimalny. Uzasadnić, że

a) jeżeli istnieje element największy w Y, to jest on jedynym elementem maksymalnym.

b) może się zdażyć tak, że istnieje ograniczenie górne, a nie istnieje element maksymalny.

c) może się zdażyć, że Y ma dokładnie jeden element maksymalny, a nie ma elementu największego.

Zad 7. Rozważmy płaszczyznę $\mathbb{R}^2$ z częściowym porządkiem $(a,b) \leq (c,d) \overset{df}{\iff} a \leq c$ oraz $b \leq d$. Dla podanych zbiorów zbadać, czy istnieją ograniczenia górne, dolne, element największy, najmniejszy lub elementy maksymalne, minimalne?

$$A = [0,1]^2, \qquad B = [0,1] \times [0,1), \qquad C = \mathbb{R} \times [-1,1], \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$E = (\{0\} \times [1,2]) \cup (\{1\} \times [0,1]), \qquad F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1 - |x|\}, \quad G = (-\infty, 0)^2.$$

Zad 8. Jeśli w zbiorze ograniczeń górnych zbioru $Y \subseteq X$ istnieje element najmniejszy, to jest on dokładnie jeden (dlaczego?), nazywamy go *kresem górnym* zbioru Y i oznaczamy $\sup Y$ lub $\bigvee_{y \in Y} y$. Analogicznie, jeżeli istnieje największe ograniczenie dolne zbioru Y, to nazywamy je *kresem dolnym* zbioru Y i ozaczamy $\inf Y$ lub $\bigwedge_{y \in Y} y$. Wyznaczyć sup oraz inf w zbiorach z Zadania 7.

Zad 9 (łączność sup i inf)**.** Niech $E = \bigcup_{i \in I} E_i$ będzie sumą podzbiorów zbioru uporządkowanego X.

a) jeśli $\sup E_i$ istnieje dla każdego $i \in I$ oraz istnieje $\sup\{\sup E_i : i \in I\}$ to istnieje $\sup E$ oraz

$$\sup E = \sup\{\sup E_i : i \in I\}.$$

b) jeśli $\inf E_i$ istnieje dla każdego $i \in I$ oraz istnieje $\inf\{\inf E_i : i \in I\}$ to istnieje $\inf E$ oraz

$$\inf E = \inf\{\inf E_i : i \in I\}.$$